

Mathematische Ableitung der Spin-Netzwerke in der Entropischen Quantengravitation (EQG)

1 Einleitung

In der Loop-Quantengravitation (LQG) sind Spin-Netzwerke die Grundbausteine der Raumzeit. Sie bestehen aus Graphen mit Kanten, die Spins tragen, und Knoten, die diese Spins algebraisch verknüpfen. Die Entropische Quantengravitation (EQG) interpretiert diese Netzwerke als emergente Strukturen thermodynamischer Zustände der Raumzeit.

2 Definition der Spin-Netzwerke in LQG

Ein Spin-Netzwerk S ist definiert als ein Graph Γ mit Kanten e und Knoten v , wobei:

- Jede Kante e mit einer irreduziblen Darstellung j_e von $SU(2)$ assoziiert ist.
- Jeder Knoten v mit einem Intertwiner I_v assoziiert ist, der die Spins der einlaufenden Kanten verknüpft.

Der Zustandsraum ist gegeben durch:

$$\mathcal{H}_{\text{LQG}} = \bigoplus_{\Gamma, j_e, I_v} \mathcal{H}_{\Gamma}, \quad (1)$$

mit

$$\mathcal{H}_{\Gamma} = \bigotimes_e \mathcal{H}_{j_e} \otimes \bigotimes_v \mathcal{H}_{I_v}. \quad (2)$$

3 Interpretation in der EQG

In der EQG ergeben sich Spin-Netzwerke als thermodynamische Gleichgewichtszustände stabiler oder metastabiler Konfigurationen des Raumzeit-Vakuums. Die Spins j_e und Intertwiner I_v kodieren lokale Energiedichte-Variationen $\delta\rho(x)$.

Die effektive freie Energie eines Netzwerks ist gegeben durch:

$$F_{\text{eff}}[\Gamma] = \sum_e f(j_e) + \sum_v g(I_v), \quad (3)$$

mit Funktionen $f(j_e)$ und $g(I_v)$, die die Entropie der lokalen Mikrozustände beschreiben.

4 Lösung fundamentaler Probleme der LQG in der EQG

4.1 Renormierungsproblem

In der EQG ergibt sich der makroskopische Grenzübergang durch die statistische Summe über Mikrofluktuationen:

$$Z = \sum_{\Gamma} e^{-\beta F_{\text{eff}}[\Gamma]}, \quad (4)$$

mit der inversen Temperatur $\beta = 1/k_B T$. Dadurch entsteht eine hydrodynamische Näherung der Einstein-Gleichungen, ohne dass eine explizite Renormierung nötig ist.

4.2 Zeitproblem

In der EQG wird eine globale Zeitfunktion $T(x)$ mit ADM-Zerlegung verwendet:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt). \quad (5)$$

Dadurch wird die Wheeler-DeWitt-Gleichung durch eine effektive Schrödinger-Gleichung ersetzt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial T} |\Psi\rangle = \hat{H}_{\text{eff}} |\Psi\rangle, \quad (6)$$

was die eingefrorene Dynamik der LQG vermeidet.

4.3 Varianten der Spin-Netzwerke

Die verschiedenen Konfigurationen der Spin-Netzwerke in der LQG ergeben sich in der EQG als unterschiedliche thermodynamische Fluktuationsmodi:

- **Stabiles Vakuum:** Minimale freie Energie, stationäre Netzwerke mit wenigen topologischen Defekten.
- **Metastabiles Vakuum:** Frustrationseffekte in der lokalen Spin-Statistik führen zu transienten Fluktuationen.

5 Fazit

Die EQG ermöglicht eine mathematische Ableitung der Spin-Netzwerke, ohne die fundamentalen Probleme der LQG. Insbesondere:

- Das Renormierungsproblem wird durch eine thermodynamische Mittelung gelöst.
- Das Zeitproblem wird durch eine globale Zeitfunktion umgangen.
- Varianten der Spin-Netzwerke ergeben sich als natürliche Fluktuationenmuster.

Die EQG bietet somit eine kohärente Verbindung zwischen quantisierten Mikrozuständen der Raumzeit und makroskopischen thermodynamischen Eigenschaften.